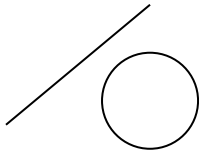


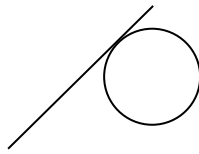
Kreise und Geraden

Passante



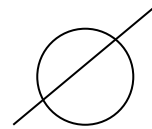
Kein SP

Tangente



Ein SP

Sekante



Zwei SP

Satz 1: Die Tangente an den Kreis $k: (\vec{x} - \vec{k})^2 = r^2$ im Punkt $B (b_1 | b_2)$ hat die Gleichung $(\vec{x} - \vec{m}) \cdot (\vec{b} - \vec{m}) = r^2$.

Satz 2: Die Polare an den Kreis $(\vec{x} - \vec{k})^2 = r^2$ zum Punkt $P (p_1 | p_2)$ hat die Gleichung $(\vec{x} - \vec{m}) \cdot (\vec{p} - \vec{m}) = r^2$.

Aufgaben

1) Schneidet die Gerade den Kreis? Bestimme, falls möglich, Schnittpunkt oder Berührungspunkt.

$$\text{a) } k: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right]^2 = 5 \quad g: \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{x}$$

$$\text{b) } k: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right]^2 = 5 \quad g: \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{x}$$

$$\text{c) } k: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right]^2 = 5 \quad g: \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{x}$$

Lösungen:

a) Lösung nach Schema von b) ergibt keinen Schnittpunkt

$$\text{b) Einsetzen von g in k: } \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right]^2 = 5$$

$$\begin{aligned}
 (-2+t)^2 + (1+2t)^2 &= 5 \\
 4 - 4t + t^2 + 1 + 4t + 4t^2 &= 5 \\
 5t^2 + 5 &= 5 \\
 5t^2 &= 0 \\
 t &= 0
 \end{aligned}$$

Einsetzen von t in g ergibt B(1|3).

c) Lösung nach Schema von b) ergibt zwei Schnittpunkte $S_1(2,6|4,2)$ und $S_2(1|1)$.

2) Bestimme eine Gleichung der Tangente t an den Kreis

k: $x_1^2 + x_2^2 + 4x_1 + 8x_2 = -11$ im Punkt $(-5 | -4)$.

Lösung: k in Koordinatenform: $(x_1 + 2)^2 + (x_2 + 4)^2 = 9$ (durch quadr. Ergänzung)

$$\rightarrow M(-2 | -4), r = 3$$

$$\rightarrow t: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \right] \cdot \left[\begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \right] = 9$$

$$\text{Also: } \rightarrow t: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} = 9$$

3) Bestimme die Gleichungen der Tangenten vom Punkt P an den Kreis um M mit dem Radius r: $M(-2 | 2)$, $r = 3$, $P(1 | -1)$.

$$\text{Lösung: } k: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right]^2 = 9$$

$$k: (x_1 + 2)^2 + (x_2 - 2)^2 = 9$$

$$p: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = 9$$

$$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} = 9$$

$$3x_1 - 3x_2 + 6 + 6 = 9$$

$$x_1 - x_2 = -1$$

$$x_1 = -1 + x_2$$

Einsetzen von x_1 in k:

$$(x_2 + 1)^2 + (x_2 - 2)^2 = 9$$

$$x_2^2 + 2x_2 + 1 + x_2^2 + 4x_2 + 4 = 9$$

$$2x_2^2 - 2x_2 - 4 = 0$$

$$x_2^2 - x_2 - 2 = 0$$

$$x_{2_{1/2}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}$$

$$x_{2_1} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 \Rightarrow \text{Einsetzen in p: } x_1 = -1 + x_2 \rightarrow x_1 = 1 \Rightarrow B(1 | 2)$$

$$x_{2_1} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1 \Rightarrow \text{Einsetzen in p} \rightarrow x_1 = -2 \Rightarrow B(-2 | -1)$$

